**ΘΕΜΑ 1 (2 μ)**

**i)** Δώστε τον ορισμό του διακριτού μετρικού χώρου $(E,\rho)$.

**ii)** Αν $(E,\rho)$ ο διακριτός μετρικός χώρος, δείξτε ότι:

α) Για κάθε $c \in E$, το μονοσύνολο $\{c\}$ είναι ανοικτό σύνολο.

β) Κάθε υποσύνολο $A$ του $E$ είναι ανοικτό.

γ) Αν $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ακολουθία στοιχείων του $E$ και $a \in E$ ώστε $\lim\limits_{\nu\in N} a_\nu = a$, τότε υπάρχει $\nu_0 \in N$ τέτοιο ώστε $a_\nu = a$ για κάθε $\nu \geq \nu_0$.

**iii)** Δίνεται μετρικός χώρος $(E,\rho)$ ώστε $E$ πεπερασμένο σύνολο. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολό του είναι ανοικτό.

**ΘΕΜΑ 2 (1,5 μ)**

Δίνεται μετρικός χώρος $(E,\rho)$.

α) Δώστε τον ορισμό της θήκης $\overline{A}$ ενός υποσυνόλου $A$ του $E$ και αποδείξτε ότι αν $x \in E$, τότε $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ υπάρχει $(a_\nu)_{\nu\in N}$ ακολουθία στοιχείων του $A$, ώστε $\lim\limits_{\nu\in N} a_\nu = x$.

β) Έστω $A \subseteq E$ μη κενό και $x \in E$. Δώστε τον ορισμό της απόστασης $\rho(x,A)$ του σημείου $x$ και του συνόλου $A$. Αποδείξτε ότι $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \rho(x,A) = 0$.

γ) Έστω $x \in E$ και $A, B$ υποσύνολα του $E$, ώστε $A \subseteq B$. Δείξτε ότι $\rho(x,B) \leq \rho(x,A)$.

**ΘΕΜΑ 3 (2,75 μ)**

**i)** Δίνεται μετρικός χώρος $(E,\rho)$.

α) Αν $y \in E$ και $r > 0$ θεωρούμε την σφαιρική περιοχή $B(y,r)$. Επίσης θεωρούμε μία ακολουθία στοιχείων του $E$, $(a_\nu)_{\nu\in N}$ τέτοια ώστε $a_\nu \notin B(y,r)$ για κάθε $\nu \in N$, και ένα $a \in E$ ώστε $\lim\limits_{\nu\in N} a_\nu = a$. Δείξτε ότι $a \notin B(y,r)$.

β) Έστω $A, B$ ξένα υποσύνολα του $E$. Δείξτε ότι τα σύνολα $\overline{A}, B^\circ$ είναι επίσης ξένα μεταξύ τους, όπου $B^\circ$ το εσωτερικό του $B$.

γ) Αν $A, B$ ανοικτά υποσύνολα του $E$ δείξτε ότι το σύνολο $A \cap B$ είναι ανοικτό.

**ii)** Βρείτε παράδειγμα μετρικού χώρου και $\{A_i, i \in N\}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του με δείκτες στους φυσικούς αριθμούς ώστε το σύνολο $\bigcap\limits_{i\in N} A_i$, να μην είναι ανοικτό.

**ΘΕΜΑ 4 (1,5 μ)**

**i)** Περιγράψτε πλήρως πότε ο μετρικός χώρος $(E,\rho)$ θα λέγεται πλήρης. Πότε ένα υποσύνολο $A$ ενός μετρικού χώρου $(E,\rho)$ θα λέγεται πλήρες.

**ii)** Έστω $(E,\rho)$ πλήρης μετρικός χώρος και $(b_\nu)_{\nu\in N}$ μία ακολουθία στοιχείων του $E$ ή οποία είναι βασική. Έστω ακόμα μία ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N}$ στο $E$, ώστε

$\rho(a_\nu, b_\nu) \to 0$, καθώς $\nu \to \infty$. Δείξτε ότι η $(a_\nu)_{\nu \in N}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $E$.

**iii)** Δίνεται ο μετρικός χώρος των πραγματικών αριθμών $(R, \rho_1)$, με την συνήθη μετρική $\rho_1(x, y) = |x - y|$, $x, y \in R$. Εξετάστε ως προς την πληρότητα τα υποσύνολά του : $Q$, $Z$.

**ΘΕΜΑ 5 (2 μ)**

**i)** Δώστε τον ορισμό ενός συμπαγούς μετρικού χώρου $(E, \rho)$ -πλήρης περιγραφή. Πότε ένα υποσύνολο $A$ ενός μετρικού χώρου $(E, \rho)$ θα λέγεται συμπαγές.

**ii)** Δείξτε ότι αν $K$ κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς μετρικού χώρου $(E, \rho)$, τότε το $K$ είναι συμπαγές.

**iii)** Δώστε τον ορισμό ενός ολικά φραγμένου μετρικού χώρου $(E, \rho)$, και δείξτε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι ολικά φραγμένος.

**iv)** Βρείτε παράδειγμα ολικά φραγμένου μετρικού χώρου ο οποίος δεν είναι συμπαγής.

**ΘΕΜΑ 6 (1,75 μ)**

**i)** Δώστε τον ορισμό ενός συνεκτικού μετρικού χώρου $(E, \rho)$ αφού ορίσετε τι σημαίνει ότι η συλλογή $\{A, B\}$ υποσυνόλων του $E$, είναι μία ανοικτή διαμέρισή του. Δώστε τον ορισμό του συνεκτικού υποσυνόλου $S$ ενός μετρικού χώρου $(E, \rho)$.

**ii)** Έστω συνεχής συνάρτηση $f : (E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2)$, ώστε $f$ επί. Έστω ακόμη ότι ο $(E_1, \rho_1)$ είναι συνεκτικός. Δείξτε ότι ο $(E_2, \rho_2)$ είναι συνεκτικός.

**iii)** Δίνεται ο μετρικός χώρος των πραγματικών αριθμών $(R, \rho_1)$, με την συνήθη μετρική $\rho_1(x, y) = |x - y|$, $x, y \in R$. Εξετάστε ως προς την συνεκτικότητα τα υποσύνολά του : $Q$, $Z$. Επίσης εξετάστε ως προς την συνεκτικότητα το σύνολο $\{x \in R : 0 < x < 2, x \neq 1\}$